Martina Groß

Fit in Klausur und Abitur

Mathematik 11.–12./13. Klasse

Bange Verlag

1. Auflage 2017
ISBN: 978-3-8044-1599-7
PDF: 978-3-8044-5599-3

Umschlagfoto: Fotolia.com
Satz und Grafiken: SMP Oehler, Remseck
Druck und Weiterverarbeitung: Druckerei KOPA, Litauen

Tipps zum Training mit diesem Buch

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

jeder würde gerne Erfolg im Fach Mathematik und insbesondere im Abitur haben, doch selbst wenn man den Stoff verstanden hat, heißt das noch lange nicht, dass man auch in den Klausuren gute Noten schreibt. Dies liegt oft daran, dass es an der Rechenroutine mangelt. Eine Rechenregel nur theoretisch zu kennen, zum Beispiel die Produktregel für Ableitungen, heißt nicht, dass man sie auch fehlerfrei anwenden kann. Dieses Buch soll dir dabei helfen, bei regelmäßiger Anwendung deine **Rechenkompetenz** zu **schulen**. Es enthält eine **Sammlung von 72 Kurztests und 8 Übungsklausuren**, die dir **gezielt** helfen sollen, dich auf die **nächste Klausur** und das **Abitur vorzubereiten**. Die Aufgaben der Kurztests erstrecken sich auf die im hilfsmittelfreien Teil verlangten Kompetenzen und durch regelmäßige Wiederholung kannst du es schaffen, dir die wichtigsten Rechenregeln und Verfahren einzuprägen. Dies hat zur Folge, dass du diese Aufgaben sicher in der dafür vorgegebenen Zeit meisterst und für die Transferaufgaben im zweiten Teil mehr Zeit zur Verfügung hast. Die Aufgaben in den Probeklausuren stellen eine Sammlung möglicher Aufgaben aller Teile des Abiturs dar.

Die **Kurztests** sollten nach den folgenden Vorgaben bearbeitet werden:
1. Bearbeite einen oder zwei Kurztests pro Woche, je nachdem wie weit dein Fachlehrer im Unterricht gekommen ist.
2. Nimm dir **10 Minuten** Zeit für die Aufgaben. Achte genau darauf, diese Zeit einzuhalten, denn es geht nicht nur darum, die Aufgaben zu lösen, sondern auch darum, dies in einer vorgegebenen Zeit zu tun.
3. Konzentriere dich in dieser Zeit nur auf diese Aufgaben und sorge dafür, dass alle Störfaktoren ausgeschaltet sind.
4. Bearbeite die Aufgaben ohne Hilfsmittel und ohne in der Lösung nachzuschauen. Wer dies tut und sich hinterher sagt: „Das hätte ich gekonnt!“, macht sich meist etwas vor.
5. Kontrolliere anschließend deine Lösungen und notiere dir, wo deine Fehlerquellen liegen. Hierfür gibt es in diesem Buch ausführliche Lösungen.
6. Mit Hilfe des Punkteschlüssels kannst du deine Leistung einschätzen.

Die vorliegenden Kurztests und Probeklausuren sind so aufgebaut, dass sie exakt zu den **im Abitur verlangten Themen** passen: Fortführung der Differenzialrechnung, Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel), Integralrechnung, Lineare Gleichungssysteme, Funktionsanpassung, Analytische Geometrie: Ebenen, Exponentialfunktionen und Wachstum, Analytische Geometrie: Skalarprodukt, Normalenvektoren, Abstände, Wahrscheinlichkeit.

Die Aufgaben können also das Lernen kontinuierlich im Laufe der Kursstufe begleiten und zudem regelmäßig wiederholt werden, um den im Abitur verlangten Stoff routiniert zu beherrschen. Zu diesem Zweck sind Aufgaben zu den Grundkompetenzen regelmäßig und unabhängig vom Kapitel in den Kurztests enthalten.

In der „heißen Phase“ vor dem Abitur können dir die **Probeklausuren** eine wertvolle Hilfe sein, denn sie beinhalten **Aufgaben, die genauso im Abitur verlangt** werden könnten. Nimm dir für ihre Bearbeitung etwa **45 Minuten** Zeit. Zur Kontrolle gibt es auch hierfür **ausführliche Lösungen**.

Inhalt

Kapitel 3: Lineare Gleichungssysteme 35

Kapitel 4: Funktionsanpassungen 38

Kapitel 5: Ebenen 40

Kapitel 6: Exponentialfunktionen 52

Kapitel 7: Skalarprodukt, Abstände und Winkel 64

Kapitel 8: Wahrscheinlichkeit 73

Probeklausuren – je 45 Minuten

Kapitel 9: Üben fürs Abitur 79

Lösungen 103

Kapitel 4: Funktionsanpassungen

32. Funktionen ableiten und bestimmen – 1 –

1 Bestimme die erste Ableitung und berechne f′(–2).

a) $f(x) = 4ax^3 - 6ax + 12$

b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

c) $f(x) = \sqrt{ax + b}$

d) $f(x) = \frac{1}{ax + b}$

/ 10

2 Gib den allgemeinen Funktionsterm der gesuchten Funktion sowie die Anzahl der geeigneten Bedingungen an, die benötigt werden, um den Funktionsterm eindeutig zu bestimmen.

a) Eine ganzrationale Funktion fünften Grades hat einen Graphen, der punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft.

b) Eine ganzrationale Funktion vierten Grades.

c) Eine lineare Funktion, deren Graph durch den Ursprung verläuft.

/ 6

/ 16

Bewertung: *16 – 12 Punkte:* *11 – 6 Punkte:* *5 – 0 Punkte:*

10 Minuten

33. Funktionen ableiten und bestimmen – 2 –

1 Bestimme die erste Ableitung und f′(3).

a) $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$

b) $f(x) = -2tx^2 + 8tx$

c) $f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx}$

/ 8

2 Zur Bestimmung einer Funktionsgleichung sind die folgenden Bedingungen angegeben. Finde verschiedene Möglichkeiten, wie der Aufgabentext formuliert sein könnte.

a) $f(3) = 4$

b) $f'(1) = 6$

c) $f'(4) = 0$

d) $f''(-1) = 0$

/ 14

/ 22

Bewertung: *22 – 15 Punkte:* *14 – 8 Punkte:* *7 – 0 Punkte:*

c) Für die Bequemlichkeit des Tieres wird die Transportbox eben mit einem Polymerschaum ausgegossen, so dass dieser in der Mitte der Box eine maximale Höhe von 10 cm hat. Berechne näherungsweise, wie hoch das dadurch entstehende zusätzliche Gewicht der Transportbox ist, wenn man davon ausgeht, dass 1 Liter des Polymerschaums 0,57 kg wiegt.

Schnittstellen bestimmen: $h(x) = f(x)$ mit $h(x) = 1$

$x_1 \approx 1{,}85$ $\quad$ $x_2 \approx 6{,}15$ (mit TR) ***(1 P)***

Volumen und Gewicht berechnen:

$V \approx \int_{1{,}85}^{6{,}15} \left[1 - \left(0{,}01 \cdot (x-4)^6\right)\right] dx$ ***(2 P)***

$\cdot\, 5 \cdot 0{,}57$ ***(1 P)***

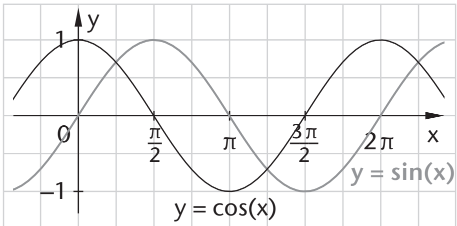
$\approx 10{,}53$

Die Transportbox hätte ein zusätzliches Gewicht von ca. 10,5 kg. ***(1 P)***

76. Probeklausur – 4 –

Seite 88 ‹

1 Löse die Gleichungen für $0 \leqq x \leqq 2\pi$.



a) $\sin(x) - \cos(x) = 0$

$\sin(x) = \cos(x)$ ***(1 P)***

$x_1 = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ ***(1 P)***

b) $\sin(x) \cdot (2 - \sin(x)) = 1$

$-\sin^2(x) + 2\sin(x) - 1 = 0$ ***(1 P)***

$\sin^2(x) - 2\sin(x) + 1 = 0$ $\quad$ Rückschritt der binomischen Formel

$(\sin(x) - 1)^2 = 0$

$\sin(x) = 1$ ***(2 P)***

$x_1 = \frac{\pi}{2}$ ***(1 P)***

2 Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat im Ursprung einen Extrempunkt und den Wendepunkt W(1 | 2). Bestimme den Term dieser Funktion.

Allgemeine Form einer Funktion dritten Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\qquad$ $f''(x) = 6ax + 2b$

Extrempunkt im Ursprung:

$f(0) = 0$ $\qquad$ $d = 0$ ***(1 P)***

$f'(0) = 0$ $\qquad$ $c = 0$ ***(1 P)***

Wendepunkt W(1 | 2): $\qquad$ c = 0 und d = 0 liefert:

$f(1) = 2$ $\qquad$ $a + b + c + d = 2$ ***(1 P)*** $\qquad$ I $\quad a + b = 2$

$f''(1) = 0$ $\qquad$ $6a + 2b = 0$ ***(1 P)*** $\qquad$ II $\quad 6a + 2b = 0$

I nach b auflösen und in II einsetzen liefert:

$a = -1$ und $b = 3$. ***(1 P)***

Die gesuchte Funktion hat die Gleichung $f(x) = -x^3 + 3x^2$. ***(1 P)***

3 Gegeben sind die Punkte A(2 | –1 | 5), B(4 | 3 | 2), C(–1 | 5 | 8) und D(–3 | 1 | 11). Zeige, dass die Punkte ein Parallelogramm bilden, und berechne seinen Flächeninhalt.

Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn gegenüberliegende Seiten parallel sind. ***(0,5 P)***

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ***(1 P)*** $\qquad$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ ***(1 P)***

Das Viereck ist ein Parallelogramm. ***(0,5 P)***

$A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 30 \\ 3 \\ 24 \end{pmatrix}\right|$ ***(1 P)***

$= \sqrt{30^2 + 3^2 + 24^2}$ ***(1 P)***

$= 3 \cdot \sqrt{165} \approx 38{,}5$ ***(1 P)***

Das Parallelogramm hat einen Flächeninhalt von ca. 38,5 FE.

hier abtrennen

Seite 89

4 Bestimme diejenigen Punkte auf g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, die von E mit E: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6$ den Abstand 3 haben.

Der Punkt $P(1 + 2t \mid -10 + 7t \mid 6 - 3t)$ ***(1 P)***

liegt auf der Geraden g. Der Abstand von P zu E soll 3 sein. Dies liefert mit $|\vec{n}| = 3$. ***(1 P)***

$$3 = \frac{|(1 + 2t) - 2 \cdot (-10 + 7t) + 2 \cdot (6 - 3t) - 6|}{3} \quad \textbf{(1 P)}$$

$$= \frac{|1 + 2t + 20 - 14t + 12 - 6t - 6|}{3} = \frac{|27 - 18t|}{3} \quad \textbf{(1 P)}$$

$9 = |27 - 18t|$

$9 = 27 - 18t$ oder $-9 = 27 - 18t$

$t_1 = 1$ ***(1 P)*** $t_2 = 2$ ***(1 P)***

Einsetzen in g liefert die gesuchten Punkte $P_1(3 \mid -3 \mid 3)$ und $P_2(5 \mid 4 \mid 0)$.

5 Auf einem Glücksrad befinden sich drei Sektoren mit den Farben Blau, Rot und Gelb. Der rote und der gelbe Sektor sind gleich groß. Der blaue Sektor ist so groß wie der rote und der gelbe zusammen. Das Glücksrad wird fünfmal hintereinander gedreht. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, genau zweimal Rot, und zwar direkt hintereinander, zu drehen?

A: zweimal direkt hintereinander Rot bei 5 Drehungen

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{27}{256} \quad \textbf{(1 P)}$$

zweimal rot ***(1 P)***

dreimal nicht rot ***(1 P)***

vier Möglichkeiten für rot zweimal direkt hintereinander ***(1 P)***

Seite 90

6 Der Querschnitt eines großen Industrietanks wird modellhaft begrenzt durch die Graphen der beiden Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4$ und $g(x) = -\frac{1}{8}x^4 + 4$.
(Alle Längenangaben in Metern.)

a) Skizziere den Querschnitt des Tanks in ein geeignetes Koordinatensystem und berechne den Inhalt seiner Querschnittsfläche näherungsweise.

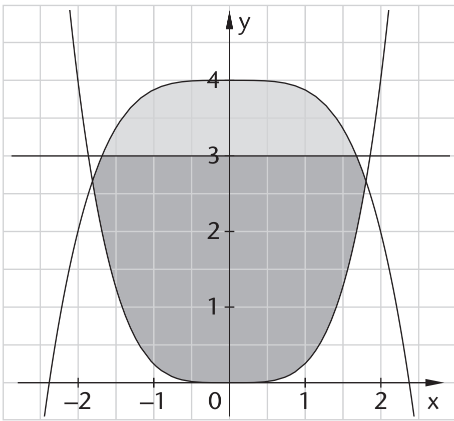
Schnittstellen bestimmen: $g(x) = f(x)$

$x_1 \approx -1{,}81$ $x_2 \approx 1{,}81$ (mit TR) ***(1 P)***

Inhalt der Querschnittsfläche berechnen:

$$A \approx \int_{-1{,}81}^{1{,}81} \left[\left(-\frac{1}{8}x^4 + 4\right) - \left(\frac{1}{4}x^4\right)\right] dx \approx 11{,}57 \quad \textbf{(2 P)}$$

Die Querschnittsfläche des Tanks hat eine Größe von ca. $11{,}57\,m^2$.



Skizze: ***(2 P)***

b) Der Tank ist bis zu einer Höhe von 3 m mit Flüssigkeit gefüllt. Berechne näherungsweise, wie viel Flüssigkeit sich im Tank befindet, wenn er eine Länge von 15 m hat.

Schnittstellen bestimmen: $h(x) = g(x)$ mit $h(x) = 3$

$x_1 \approx -1{,}68$ $x_2 \approx 1{,}68$ (mit TR) ***(1 P)***

Volumen berechnen:

$$V \approx \left(11{,}57 - \int_{-1{,}68}^{1{,}68} \left(-\frac{1}{8}x^4 + 1\right) dx\right) \cdot 15 \approx 133{,}2 \quad \textbf{(3 P)}$$

Im Tank befinden sich ca. $133\,m^3$ Flüssigkeit.

c) Berechne näherungsweise, wie viel Flüssigkeit noch in den Tank passt.

Volumen berechnen:

$$\int_{-1{,}68}^{1{,}68} \left(-\frac{1}{8}x^4 + 1\right) dx \cdot 15 \approx 40{,}4 \quad \textbf{(2 P)}$$

In den Tank passen noch ca. $40{,}4\,m^3$ Flüssigkeit.

hier abtrennen